

Tentamen ProgrammaCorrectheid

17 augustus 2004

09.00 – 12.00 uur

■ Opgave 1

Gegeven zijn de declaraties

```
CONST  
   $n \in \text{INTEGER} ; \{n \geq 0\}$   
   $a \in \text{ARRAY } [0 \dots n) \text{ OF } \text{INTEGER} ;$   
   $w \in \text{INTEGER} ;$ 
```

Gevraagd wordt een programma dat een *index* t oplevert zó, dat $a[t]$ een kleinste element uit het array a is dat groter is dan w .

Als alle elementen van a kleiner dan of gelijk aan w zijn, dan bestaat zo'n index niet. We lossen dat op door het array a een extra element te geven en daat de waarde $+\infty$ te veronderstellen. Zo komen we tot de volgende specificatie van het gevraagde commando S :

```
CONST  
   $n \in \text{INTEGER} ; \{n \geq 0\}$   
   $a \in \text{ARRAY } [0 \dots n] \text{ OF } \text{INTEGER} ; \{a[n] = +\infty\}$   
   $w \in \text{INTEGER} ;$   
VAR  
   $t : \text{INTEGER} ;$   
 $S;$   
 $\{Q : 0 \leq t \leq n \wedge a[t] = (\text{MIN } i : 0 \leq i \leq n \wedge a[i] > w : a[i])\}$ 
```

- 1. Definieer voor $0 \leq k \leq n$ de functie

$$M(k) = (\text{MIN } i : k \leq i \leq n \wedge a[i] > w : a[i])$$

en leid recurrente betrekkingen af voor $M(k)$. Zorg ervoor dat je in je uiteindelijke expressies geen minimumoperaties of -kwantificaties meer hebt staan.

- 2. Ontwerp systematisch een herhalingscommando S dat aan de gegeven specificatie voldoet.

Opgave 2

Gegeven: een functie $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ die ascending is in beide argumenten en de specificatie

CONST

$m \in \text{INTEGER} ; \{m \geq 0\}$

$n \in \text{INTEGER} ; \{n \geq 0\}$

VAR

$z : \text{INTEGER} ;$

$\{P : \mathbb{Z} = (\Sigma i, j : 0 \leq i < m \wedge 0 \leq j < n \wedge h(i, j) \geq 0 : j^2)\}$

$T;$

$\{Q : z = \mathbb{Z}\}$

- 3. Definieer een functie $F(x, y)$ die een geschikte generalisatie is van de kwantificatie uit de precondition. Doe dit heel zorgvuldig; een verkeerde keus is desastreus!
- 4. Leid voor $F(x, y)$ geschikte recurrente betrekkingen af, inclusief het basisgeval.
- 5. Geef een implementatie van het commando T . We vragen niet om het gehele stappenplan uit te schrijven, maar zijn tevreden met de laatste stap: een goede samenvatting, inclusief invariant en variante functie.

Opgave 3

Gegeven is de functie $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ door

$$\begin{aligned} f(k) &= -k && \text{voor } k < 0 \\ f(0) &= 1 \\ f(k) &= k + f(k - f(k \text{ DIV } 2)) && \text{voor } k > 0 \end{aligned}$$

Bekijk de volgende specificatie

PROCEDURE $F(m : \text{INTEGER}) : \text{INTEGER} ;$

$\{ \text{all } Y \in \text{INTEGER} :$

$: \text{pre } f(m) = Y$

$, \text{post } Y > 0 \wedge \text{return} = Y \}$

- 6. Geef een (recursieve) implementatie van de procedure F en bewijs de correctheid van je oplossing. Formuleer daarbij expliciet de inductiehypothese en de bewijsverplichting. NB: zorg er voor dat in je handschrift f en F goed zijn te onderscheiden. Is dat een al te hoge eis, vervang F dan maar door G .



einde